**Анализ марковских скачкообразных процессов с помощью преобразования Лапласа**

Данный метод применяется для получения явного вида эволюции распределения *однородных* марковских скачкообразных процессов (МСП) с конечным множеством состояний..

Вектор распределения МСП описывается

или в явном виде

Однако, «явный» вид (1.2) тоже не позволяет понять явный вид зависимости отдельных элементов матрицы от времени *t*.

**Определение 1.1.** Пусть – действительная интегрируемая на функция. Тогда ее *преобразованием Лапласа*, называется функция аргумента *s* (вообще говоря, комплексного: ):

При этом называется *оригиналом*, а - *изображением*.

Ниже представлена краткая таблица изображений и оригиналов функций, которые используются при анализе МСП.

Таблица 1. Таблица преобразования Лапласа.

|  |  |
| --- | --- |
| **Оригинал** | **Изображение** |
|  | *1* |
|  |  |
| *I(t - u)* |  |
| *1* |  |
|  |  |
| *t* |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Производящая функция распределения имеет вид:

Возьмем преобразование Лапласа от левой и правой частей (1.1) и воспользуемся формулой интегрирования по частям:

откуда

Нужно отметить, что матричнозначная функция в качестве своих компонентов содержит аффинные функции аргумента *s*, поэтому компоненты матричнозначной функции в качестве своих компонентов содержит дробно-рациональные функции: их числитель будет многочленом (*n-1)*-го порядка, в то врем как знаменатель – многочлен *n*-го порядка. Все элементы с помощью метода неопределенных коэффициентов раскладываются в сумму элементарных дробей, для которой по таблице восстанавливается оригинал.

**Пример 1.1**. (выполнить самостоятельно). Доказать, что хотя бы одно собственное значение матрицы интенсивностей переходов равно *0*.

**Пример 1.2.** Матрица интенсивностей переходов равна

Найти зависимость

**Решение:**

gоэтому

Каждый элемент матрицы раскладывается на элементарные дроби методом неопределенных коэффициентов:

где пары *(Aij,Bij)* находятся путем решения системы линейных уравнений. Покажем это на примере пары *(A11,B11):*

Окончательно получаем следующее разложение

Тогда согласно таблице преобразования Лапласа и в силу условия нормировки получаем

И для любого начального условия при для любого начального условия . При этом следует отметить, что эта сходимость имеет экспоненциальную скорость. Если проанализировать эту цепь, то она является конечной неразложимой и апериодичной, т.е. эргодичной, что подтверждает формула (1.6).

**Задание для самостоятельного решения (на данном семинаре)**

1. Найти зависимость для
2. Найти зависимость для
3. Найти зависимость для

**Мартингальное представление марковского скачкообразного процесса с конечным множеством состояний**

Пусть – марковский скачкообразный процесс относительно порожденного этим процессом потока - подалгебр . Фазовым пространством данного процесса является (множество единичных векторов евклидова пространства ), а его распределение задается характеристиками : – начальное распределение МСП, – матрица интенсивностей переходов (предполагается, что все компоненты матрицы равномерно непрерывны).

**Пример 1.3.** В условиях, описанных выше, найти

**Решение:**

Зафиксируем три момента времени: *0, s* и *t,* и рассмотрим (конечную) последовательность и . Легко проверить (сделать это самостоятельно по определению), что эта последовательность является марковской цепью с дискретным временем. Тогда в силу решения Примера 7 из лекции «Мартингальное представление марковских цепей» получаем следующую цепочку равенств:

где *P(s,t)* – матрица переходных вероятностей МСП на отрезке времени *[s,t]*, являющаяся решением следующей системы дифференциальных уравнений Колмогорова:

**Теорема 1.1.** 1.МСП является единственным сильным решением следующего уравнения:

где – -согласованный квадратично интегрируемый мартингал.

2. Квадратическая характеристика мартингала равна

3. Мартингал можно рассматривать как процесс с ортогональными приращениями и следующей автоковариационной функцией

**Набросок доказательства:**

Из (1.9) следует, что выражается через следующим образом:

то есть действительно, – -согласованный мартингал. Его квадратическая интегрируемость (т.е. свойство ) следует из того, что фазовое пространство является ограниченным множеством.

Проверим для выполнение мартингального свойства, т.е. выполнения тождества

Итак, используя результат Примера 1.3, получаем:

Утверждение 1 Теоремы доказано.

Формула (1.10) может быть получена двумя способами. Первый основывается на использовании обобщенного правила Ито. Так как , то легко проверить, что

так как с вероятностью 1 на любом конечном отрезке [0,t] неравенство верно не более, чем в конечном числе точек. С другой стороны, по правилу Ито

где – -согласованный мартингал. Приравниваем правые части (1.13) и (1.14):

В квадратных скобках левой и правой частей последнего равенства записаны процессы с п.н. локально ограниченной вариацией, а в фигурных скобках – мартингалы. Так как является специальным семимартингалом, то его разложение в сумму процесса с локально ограниченной вариацией и мартингала единственно. Таким образом процессы в квадратных скобках в левой и правой частях равенства совпадают. Отсюда следует справедливость формулы (1.10). Утверждение 2 Теоремы доказано.

Выведем формулу (1.10) на инженерном уровне точности другим способом, с использованием дискретизации МСП по времени. Разобьем отрезок *[0,t]* на *n* частей, и построим на нем равномерную сетку: *tk = kh*, *k=0,…,n*, *h = t/n* – шаг разбиения. Тогда конечная последовательность является марковской цепью, для которой верно следующее мартингальное представление (см. формулу (18) лекции «Мартингальное представление марковских цепей»):

где – мартингал-разность. Так как – решение дифференциальной системы (1.8), то В силу формулы (20) лекции «Мартингальное представление марковских цепей» квадратическая характеристика мартингала вычисляется по формуле

в среднем квадратическом смысле при , т.е. формула (1.10) получена другим способом.

Утверждение 3 – истинность формулы (1.11) предлагается доказать самостоятельно.